№ 10. 22 Ноября 1886 г. I Сем.



ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Выходитъ 3 раза въ мѣсяцъ, по 12 №№ въ учебный семестръ.

Адр. Ред : Кіевъ, Нижне-Владимірская, д. № 19.

Цѣна: 3 руб. въ учебный семестръ, или 6 руб. въ годъ.

Отысканіе простыхъ чиселъ,

заключающихся въ данныхъ предѣлахъ.

Въ приложеніи къ 41-му тому записокъ Императорской Академіи наукъ помѣщена статья академика В. Я. Буняковскаго, подъ заглавіемъ „Объ одномъ видоизмѣненіи способа, извѣстнаго подъ названіемъ Эратосѳенова рѣшета". Авторъ предлагаетъ весьма простой способъ для нахожденія всѣхъ простыхъ чиселъ опредѣленнаго вида, заключающихся въ данныхъ предѣлахъ.

Полагая, что способъ академика Буняковскаго можетъ быть интересенъ для читателей „Вѣстника", изложимъ его сущность и приведемъ одинъ изъ примѣровъ, разсмотрѣнныхъ авторомъ.

Подъ названіемъ „Эратосѳенова рѣшета" извѣстенъ способъ нахожденія простыхъ чиселъ, данный философомъ первой Александрійской школы Эратосѳеномъ (род. въ 276 г. до Р. Х. въ Киренѣ). По преданію Эрато-

сѳенъ поступалъ такъ: написавъ на дощечкѣ [1]) простое число 2 [2]), затѣмъ всѣ послѣдовательныя нечетныя числа до желаемаго предѣла, онъ прокалывалъ всѣ числа, дѣлящіяся на 3, 5, 7 и т. д. Такимъ образомъ дощечка его уподоблялась рѣшету, на верхней поверхности котораго оставались простыя числа. Способъ Эратосѳена состоитъ, слѣдовательно, въ выдѣленіи изъ даннаго ряда чиселъ кратныхъ 3, 5, 7 и т. д.

Для того чтобы узнать есть-ли данное число простое или нѣтъ, слѣдѣетъ испытать его относительно дѣлимости на простыя числа, меньшія его. Но для испытанія достаточно брать простыя числа не превышающія квадратнаго корня изъ даннаго числа; ибо, *если испытуемое число* N *не дѣлится ни на одно простое число меньшее* $\sqrt{N}$, *то оно не дѣлится также и на число большее* $\sqrt{N}$ [3]). Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что при испытаніи дѣлимости даннаго числа N на числа меньшія $\sqrt{N}$ въ числѣ послѣднихъ не нашлось ни одного, дѣлящаго N и допустимъ, что нѣкоторое число $B > \sqrt{N}$ дѣлитъ N, тогда

$$\frac{N}{B} = C;$$

а такъ какъ $N = \sqrt{N}.\ \sqrt{N}$ и $B > \sqrt{N}$,

то $C < \sqrt{N}$; съ другой стороны

$$\frac{N}{C} = B,$$

т. е. число N дѣлится на число C меньшее $\sqrt{N}$, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно, если число N не дѣлится ни на какое число меньшее $\sqrt{N}$, то оно простое.

Обратимся къ способу Буняковскаго и рѣшимъ такой вопросъ: найти

---

[1]) Tabella или tabula — натертая воскомъ дощечка, употреблявшаяся древними для письма.

[2]) Здѣсь кстати замѣтимъ, что единицу нельзя считать ни простымъ, ни составнымъ числомъ. Правда, она удовлетворяетъ условію простыхъ чиселъ дѣлиться только на единицу и самое себя; но она не удовлетворяетъ другому условію такихъ-же чиселъ, что сумма дѣлителей простого числа равна самому числу, сложенному съ единицею. (См. L. Euleri Opera posthuma mathematica et physica. T. I. pag. 77 „...il faut exclure l'unité de la suite des nombres premiers: étant le commencement des nombres entiers, elle n'est ni premier, ni composé“).

[3]) Legendre. Essai sur la théorie des nombres. Introduction № IX.

всѣ четырехзначныя простыя числа, начинающіяся и оканчивающіяся цифрою единица; т. е. опредѣлить которыя изъ чиселъ

$$1001,\ 1011,\ 1021,\ \ldots\ 1991$$

простыя.

Для этого выдѣлимъ изъ этого ряда всѣ числа, дѣлящіяся на простое число p.

Пусть x есть число десятковъ, которые, сложенные съ числомъ 1001, обращаютъ его въ число, дѣлящееся на простое число p; т. е. пусть

$$\frac{1001+10x}{p}=y,$$

гдѣ y есть цѣлое число. Вопросъ приведенъ, слѣдовательно, къ неопредѣленному уравненію

$$py-10x=1001,$$

рѣшенія котораго опредѣляются неравенствами

$$100>x>0,\ y>\frac{1001}{p}.$$

Посмотримъ, какое простое число слѣдуетъ подразумѣвать подъ p. Во 1-хъ p не можетъ быть ни 2, ни 5, потому что ни одно изъ чиселъ даннаго ряда не оканчивается ни 2, ни 5; во 2-хъ p не можетъ быть больше 43, ибо наибольшее простое число, дѣлящее 1991, должно быть не больше $\sqrt{1991}=44,6\ldots$ Стало быть для p возможны только такія значенія:

$$3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43; \qquad (1)$$

поэтому для рѣшенія предложеннаго вопроса будемъ имѣть двѣнадцать уравненій вида

$$py-10x=1001,$$

въ которыхъ p имѣетъ всѣ значенія ряда (1).

Рѣшая эти уравненія находимъ:

1) $3y-10x=1001$; $\quad x=3t-2$, $\quad y=327+10t$ $\quad\Big\}\ x=1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46,49,52,55,58,61,64,67,70,73,76,79,82,85,88,91,94,97.$

$$2)\quad 7y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=\ \ 0+7t\\ y&=143-10t \end{aligned}\right\}\ x=0,7,14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98$$

$$3)\quad 11y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=\ \ 0+11t\\ y&=\ 91-10t \end{aligned}\right\}\ x=0,11,22,33,44,55,66,77,88,99.$$

$$4)\quad 13y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=\ \ 0+13t\\ y&=\ 77-10t \end{aligned}\right\}\ x=0,13,26,39,52,65,78,91.$$

$$5)\quad 17y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=17t+\ 7\\ y&=63\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=7,24,41,58,75,92.$$

$$6)\quad 19y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=19t-\ 7\\ y&=49\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=12,31,50,69,88.$$

$$7)\quad 23y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=23t-15\\ y&=10t+41 \end{aligned}\right\}\ x=8,31,54,77.$$

$$8)\quad 29y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=29t-16\\ y&=10t+29 \end{aligned}\right\}\ x=13,42,71.$$

$$9)\quad 31y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=31t+27\\ y&=41\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=27,58,89.$$

$$10)\quad 37y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=37t+22\\ y&=33\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=22,59,96.$$

$$11)\quad 41y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=41t+27\\ y&=31\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=27,68.$$

$$12)\quad 43y-10x=1001;\quad \left.\begin{aligned} x&=43t-27\\ y&=17\ +10t \end{aligned}\right\}\ x=16,59.$$

Умноживъ найденныя значенія для x на 10 и сложивъ съ числомъ 1001, получимъ составныя числа; по выдѣленіи этихъ чиселъ изъ даннаго ряда въ немъ останутся только простыя числа.

Такимъ-же образомъ находятся простыя числа слѣдующихъ тысячъ.

Замѣтимъ, что этотъ способъ пригоденъ и въ томъ случаѣ, когда искомыя простыя числа должны обладать нѣкоторымъ свойствомъ; такъ, въ

упомянутой статьѣ подъ № 3 рѣшается такой вопросъ „найти всѣ простыя числа между предѣлами 100 и 1000 при томъ условіи, чтобы въ каждомъ изъ нихъ сумма трехъ составляющихъ цифръ равнялась постоянному числу, напримѣръ 16“.

Преподаватель Олонецкой гимназіи Ѳ. Крутиковъ.

Объемъ тѣла,

заключеннаго между двумя параллельными основаніями.

§ 1. Если площадь произвольнаго сѣченія b_i параллельнаго основанію тѣла связана съ площадью этого основанія B зависимостью

$$b_i = B + Ph_i + Qh_i^2, \qquad (1)$$

гдѣ P и Q суть нѣкоторыя постоянныя величины, а h_i — разстояніе плоскости сѣченія отъ основанія, то объемъ такого тѣла, заключенный между двумя параллельными основаніями B и B', можетъ быть опредѣленъ по общей формулѣ

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B''), \qquad (2)$$

гдѣ H обозначаетъ высоту, т. е. разстояніе между параллельными основаніями, а B'' — площадь равноудаленнаго отъ нихъ параллельнаго сѣченія.

Для доказательства, вообразимъ высоту H такого тѣла, для котораго имѣетъ мѣсто зависимость (1), раздѣленною на n равныхъ частей и черезъ точки дѣленій проведенную систему параллельныхъ основанію сѣченій, площади которыхъ обозначимъ черезъ b_1, b_2, b_3, . . . b_{n-1}; при этомъ будемъ имѣть по условію (1):

$$b_1 = B + P\frac{H}{n} + Q\left(\frac{H}{n}\right)^2,$$

$$b_2 = B + P\frac{2H}{n} + Q\left(\frac{2H}{n}\right)^2,$$

. . . .

$$b_{n-1} = B + P\frac{(n-1)H}{n} + Q\left(\frac{(n-1)H}{n}\right)^2.$$

При очень маломъ $\frac{H}{n}$ объемы между двумя смежными сѣченіями можно принимать за объемы призмъ; называя ихъ соотвѣтственно черезъ $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, имѣемъ:

$$v_1 = B\frac{H}{n};\ v_2 = b_1\frac{H}{n};\ v_3 = b_2\frac{H}{n};\ \ldots v_n = b_{n-1}\frac{H}{n};$$

складывая, найдемъ полный объемъ тѣла

$$V = \frac{H}{n}\left[B + \left(B + P\frac{H}{n} + Q\frac{H^2}{n^2}\right) + \left(B + P\frac{2H}{n} + Q\frac{2^2H^2}{n^2}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(B + P\frac{(n-1)H}{n} + Q\frac{(n-1)^2H^2}{n^2}\right)\right]$$

то есть:

$$V = \frac{H}{n}\left[nB + P\frac{H}{n}(1+2+3+\ldots+n-1) + Q\frac{H^2}{n^2}(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)\right].$$

Замѣняя сумму натуральныхъ чиселъ черезъ $\frac{(n-1)n}{2}$, а сумму квадратовъ ихъ черезъ $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ и сокращая, находимъ

$$V = H\left(B + PH\frac{n-1}{2n} + QH^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right),$$

или:

$$V = H\left(B + \frac{1}{2}PH + \frac{1}{3}QH^2 - \frac{1}{2n}(PH + QH^2) + \frac{1}{6n^2}QH^2\right);$$

но чтобы въ точности это выраженіе представляло объемъ даннаго тѣла, т. е. чтобы мы имѣли право считать элементарные объемы $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ за объемы призмъ, необходимо принять $n = \infty$; въ такомъ случаѣ

$$V = H\left(B + \frac{1}{2}PH + \frac{1}{3}QH^2\right),$$

или

$$V = \frac{H}{6}\left[B + (B + PH + QH^2) + 4\left(B + P\left(\frac{H}{2}\right) + Q\left(\frac{H}{2}\right)^2\right)\right]$$

а такъ какъ на основаніи зависимости (1)

$$B + PH + QH^2 = B',$$

и

$$B + P\left(\frac{H}{2}\right) + Q\left(\frac{H}{2}\right)^2 = B'',$$

гдѣ B' есть площадь верхняго основанія, а B''—площадь сѣченія, сдѣланнаго въ равномъ разстояніи отъ обоихъ основаній, то

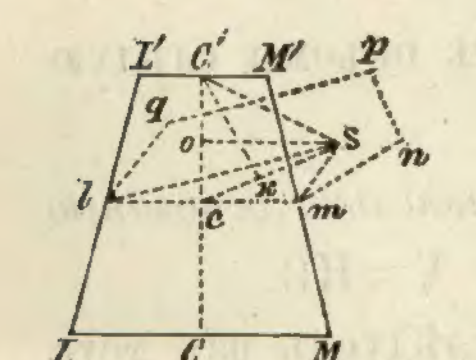
$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Для тѣлъ съ параллельными основаніями и съ треугольными или трапецоидальными гранями эту теорему можно доказать геометрически.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $lmnpq$ (фиг. 42) будетъ сѣченіе равноотстоящее отъ основаній и s какая нибудь точка этого сѣченія. Нашъ многогранникъ можетъ быть разложенъ на пирамиды, имѣющія основаніями различныя грани и общую вершину въ точкѣ s. Объемы двухъ пирамидъ, упирающихся на основанія B и B' многогранника, равны $\frac{HB}{6}$ и $\frac{HB'}{6}$. Остается вычислить сумму объемовъ всѣхъ остальныхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями боковыя грани. Вычислимъ напр. объемъ пирамиды, упирающейся на грань LML'M' и имѣющей вершину въ s. (Въ общемъ случаѣ грань эта LML'M' есть трапеція, если-же одна изъ ея параллельныхъ сторонъ обращается въ нуль, то грань представляетъ треугольникъ). Изъ точки s опускаемъ перпендикуляръ s0 на плоскость грани LML'M'—это будетъ высота разсматриваемой пирамиды; черезъ точку 0 проводимъ CC' перпендикулярно къ lm; прямая sc будетъ тоже перпендикулярна къ lm. Площадь основанія разсматриваемой пирамиды равна

Фиг. 42.



$$lm\mathrm{CC'} \text{ т. е. } 2lm\mathrm{C'}c,$$

а объемъ—равенъ $\frac{2}{3}lm\mathrm{C'}c.s0.$

Но если изъ точки C' опустимъ перпендикуляръ C'k на линію sc, то произведеніе C'c.s0, какъ мѣру удвоенной площади треугольника sC'c, можно

замѣнить равнымъ ему произведеніемъ $sc.C'k$, и тогда объемъ пирамиды выразится

$$\frac{2}{3}lm.\ sc.\ C'k.$$

А такъ какъ $C'k$ перпендикулярна къ плоскости сѣченія $lmnpq$, то

$$C'k = \frac{1}{2}H,$$

произведеніе-же $lm.sc$ есть не что иное какъ удвоенная площадь треугольника slm; вслѣдствіе этого разсматриваемый объемъ представится въ видѣ

$$\frac{H}{6}.\ 4.slm.$$

Распространяя это на всѣ остальныя боковыя грани и называя сумму всѣхъ такихъ треугольниковъ какъ slm, т. е. полную площадь сѣченія $lmnpq$, черезъ B'', находимъ для полнаго объема многогранника прежнее выраженіе

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B''). \qquad (2)$$

§ 3 По этой общей формулѣ можно напр. опредѣлять объемы слѣдующихъ тѣлъ:

а) *Призмы, пирамиды полной и усѣченной параллельно основанію*. Для призмы это очевидно, ибо здѣсь $B = B' = B''$ и слѣд. $V = HB$.

Что данная формула примѣнима къ пирамидѣ, это слѣдуетъ изъ того, что площадь произвольнаго, параллельнаго основанію сѣченія b_i, сдѣланнаго на разстояніи h_i отъ основанія, связана съ площадью этого основанія зависимостью

$$\frac{b_i}{B} = \frac{(H - h_i)^2}{H^2},$$

т. е.

$$b_i = B - \frac{2B}{H}h_i + \frac{B}{H^2}h_i^2;$$

а такъ какъ здѣсь коэффиціенты $\frac{2B}{H}$ и $\frac{B}{H^2}$ суть величины постоянныя, то стало быть пирамида удовлетворяетъ условію (1) и на этомъ основаніи—какъ было доказано въ § 1,—объемъ ея можетъ быть опредѣленъ по общей формулѣ (2). Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $B'' = 0$, $B' = \frac{1}{4}B$ и слѣдовательно $V = \frac{1}{3}HB$.

Для пирамиды усѣченной параллельно основанію:

$$B''=\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B'}}{2}\right)^2,$$

и слѣдовательно

$$V=\frac{H}{3}(B+B'+\sqrt{BB'}).$$

b) *Объемъ цилиндра, конуса полнаго и усѣченнаго параллельно основанію.* Если число сторонъ въ основаніи многогранника увеличивается до безконечности, а стороны уменьшаются, то боковая поверхность превращается въ кривую развертывающуюся поверхность [1]). Теорема наша имѣетъ мѣсто, слѣдовательно, вообще для тѣлъ, заключенныхъ между параллельными основаніями и ограниченныхъ съ боковъ развертывающеюся поверхностью. Въ частномъ случаѣ она примѣнима къ цилиндрическимъ и коническимъ поверхностямъ. Вычисленіе объема цилиндра и конуса по формулѣ (2) не представляетъ никакихъ затрудненій.

c) *Объемъ треугольной усѣченной призмы* можетъ быть найденъ по той-же формулѣ (2) если принять за основаніе (B) одну изъ боковыхъ граней; тогда противолежащее ей параллельное ребро замѣнитъ верхнее основаніе ($B'=0$) и объемъ будетъ

$$V=\frac{H}{6}(B+4B''),$$

гдѣ H есть разстояніе между гранею, принятою за основаніе и параллельнымъ ей ребромъ, а B''—площадь сѣченія, сдѣланнаго на разстояніи $\frac{1}{2}H$ отъ боковой грани B.

d) *Объемъ тетраэдра съ двумя параллельными ребрами*; принимая эти ребра за основанія ($B=0$ и $B'=0$), легко находимъ по нашей формулѣ

$$V={}^2/_3HB'',$$

гдѣ H есть разстояніе между параллельными ребрами, а B''—площадь равноудаленнаго отъ нихъ сѣченія.

---

[1]) Развертывающеюся поверхностью называется такая, которая безъ разрывовъ, растяженій и складокъ, при помощи одного разгибанія, можетъ быть наложена на плоскость. Къ такимъ поверхностямъ принадлежатъ поверхности цилиндра и конуса.

e) *Объемъ шара, шарового сегмента и пояса* тоже можетъ быть найденъ по той-же формулѣ (2), такъ какъ и въ этомъ случаѣ условіе (1) удовлетворяется. Дѣйствительно, вообразимъ два параллельныя сѣченія шара радіуса R, на разстояніи h_i одно отъ другого. Пусть площади ихъ будутъ B и b_i; называя радіусы этихъ сѣченій черезъ r и ρ, легко находимъ зависимость

$$\rho^2 = r^2 + 2h_i\sqrt{R^2 - r^2} - h_i^2;$$

отсюда

$$b_i = \pi\rho^2 = B + 2\pi\sqrt{R^2 - r^2}.h_i - \pi h_i^2,$$

гдѣ коэффиціенты при h_i и h_i^2 величины постоянныя.

Для примѣра приложимъ общую формулу (2) къ опредѣленію объема всего шара. Въ этомъ случаѣ верхнее и нижнее основаніе слѣдуетъ считать точками, т. е. $B=0$ и $B'=0$; B'' будетъ очевидно представлять площадь большого круга, а H—діаметръ. Слѣдовательно

$$V = \frac{2R}{6}(4\pi R^2) = {}^1/_3 R.S,$$

гдѣ S есть поверхность шара, или:

$$V = {}^4/_3 \pi R^3.$$

§ 4. Кромѣ вышеразсмотрѣнныхъ примѣровъ приложенія общей формулы къ опредѣленію объемовъ различныхъ геометрическихъ тѣлъ, она часто можетъ находить примѣненіе и въ вопросахъ практическихъ. Такъ напр. рвы и насыпи, которые такъ часто приходится дѣлать при сооруженіи дорогъ, каналовъ и пр., ограничены обыкновенно вверху и внизу двумя параллельными прямоугольниками LMNP, L'M'N'P' (фиг. 43), а съ боковъ трапеціями. Называя длину и ширину обоихъ основаній соотвѣтственно черезъ a и b, a' и b', имѣемъ для прямоугольника $lmnp$, равноудаленнаго отъ обоихъ основаній, длину$={}^1/_2\,(a+a')$ и ширину$={}^1/_2\,(b+b')$. Слѣдовательно объемъ, по доказанной теоремѣ, выразится формулой

Фиг. 43.

$$V = \frac{H}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')],$$

гдѣ H есть высота (или глубина).

Выраженіе это для объема можетъ быть представлено въ видѣ:

$$V=\frac{bH}{6}(2a+a')+\frac{b'H}{6}(2a'+a),$$

которое при $b'=0$ даетъ

$$V=\frac{bH}{6}(2a+a'),$$

для частнаго случая, когда тѣло имѣетъ форму крыши, или такъ называемой продолговатой кучи ядеръ.

§ 5. Приведенная въ этой статьѣ общая формула для опредѣленія объема тѣлъ

$$V=\frac{H}{6}(B+B'+4B'')$$

въ началѣ была названа формулою Финка (профессора Стасбургскаго университета), но Финкъ самъ дѣлаетъ указаніе, что она припадлежитъ проф. Сарруссу (Sarrus).

Казимиръ Рей въ журналѣ Элементарной Математики, издаваемомъ I. Bourget, предлагаетъ назвать эту формулу *омниформулой кубатуры* [1]) вслѣдствіе ея общности для многихъ тѣлъ.

Формула эта приводится во многихъ руководствахъ геометріи, какъ напр. въ Traité de Géom. par Rouché et Comberousse, § 656, или въ геом. de Vacquant § 659 и др.

Учитель Темиръ-ханъ-Шуринскаго реальн. учил. И. Пламеневскій.

Вопросы и задачи.

№ 67. Какимъ образомъ опредѣляется направленіе магнитнаго меридіана при помощи стрѣлки наклоненія (т. е. такой магнитной стрѣлки, которая можетъ колебаться только въ вертикальной плоскости)?

№ 68. Въ центрѣ начерченной на бумагѣ окружности радіуса R помѣщено концентрически коническое зеркало, котораго бокъ равенъ діаметру

---

[1]) Journ. de math. élém. et spec. 1886. № 8 p. 171.

основанія $2r$. Опредѣлить радіусъ изображенія окружности, видимаго по направленію высоты конуса (т. е. для безконечно удаленнаго наблюдателя, смотрящаго по направленію высоты).

№ 69. Доказать невозможность такого треугольника, въ которомъ одновременно и стороны, и углы составляютъ ариѳметическую прогрессію.

№ 70. Между двумя городами A и B протекаютъ двѣ рѣки. Требуется построить кратчайшій между A и B путь при условіи, чтобы мосты черезъ рѣки были перпендикулярны берегамъ.

NB. Берега каждой рѣки принимаются за двѣ параллельныя прямыя.

(В. Студенцовъ).

№ 71. Показать, что число вида $12n+5$ не можетъ быть полнымъ квадратомъ.

№ 72 Къ прямой, проходящей черезъ центръ даннаго круга, возставить перпендикуляръ въ данной на ней точкѣ, не употребляя циркуля.

(Студ. Кіевск. Унив. С. Гирманъ).

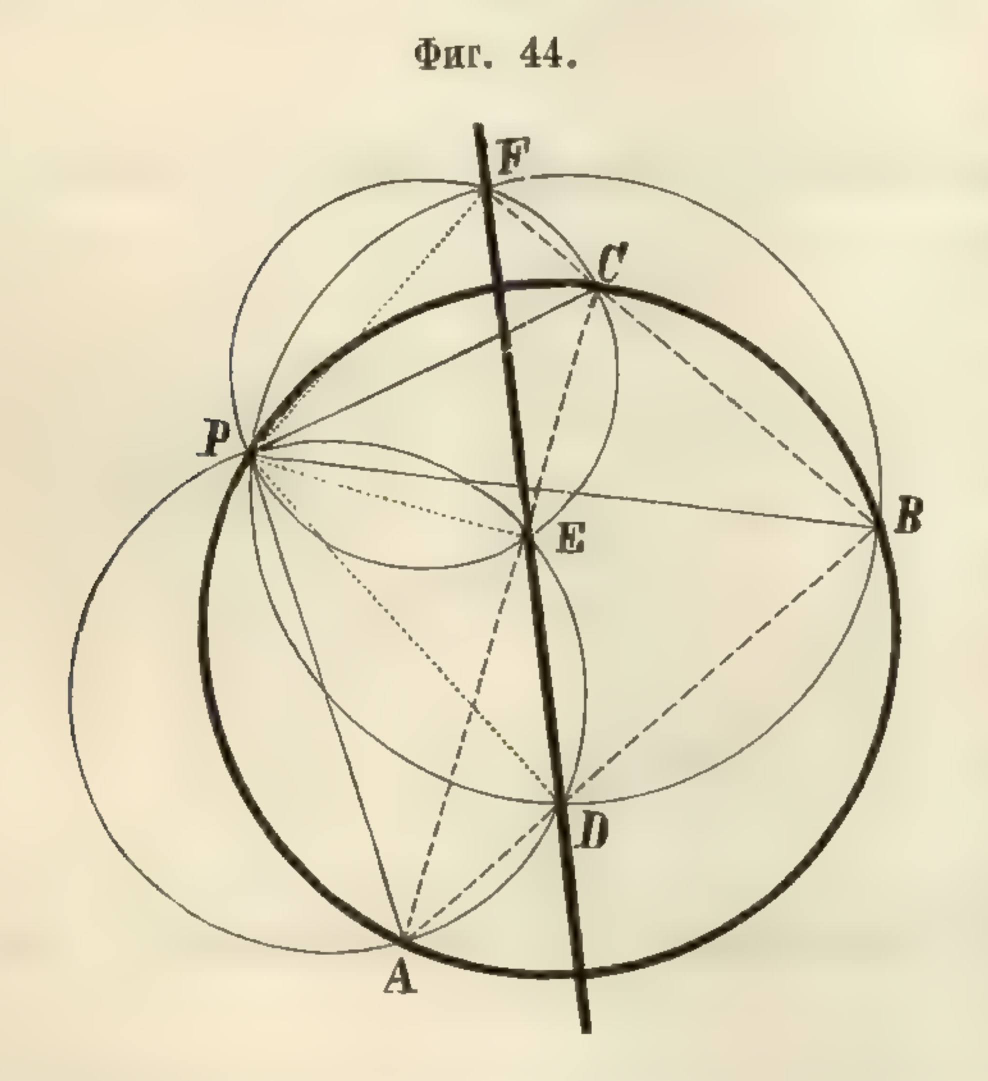
№ 73. Нѣкто A, имѣя денежные расчеты съ своимъ пріятелемъ B, пріобрѣлъ его векселя, одинъ на 35400 р. съ причитающимися сложными процентами за 4 года и—всѣ остальные на сумму 33950 р 61 к съ процентами за 1 годъ. Въ свою очередь онъ самъ былъ долженъ B: 10000 р. съ причитающимися сложными процентами за 5 лѣтъ, 33833 р. съ такими-же процентами за 2 года и еще 11995 р. 80 к. со сложными процентами за 3 года. Желая покончить съ этими взаимными долгами, они пригласили счетовода и для исчисленія сложныхъ процентовъ приняли 8%. Когда расчетъ былъ оконченъ, оказалось, что A долженъ получить съ B сумму 13522 р. 95 к. Находя ее почему-то слишкомъ значительною, A предложилъ счетоводу сдѣлать вторичное вычисленіе, принимая не 8%, а 6% годовыхъ для сложныхъ процентовъ. Однакожъ, къ великому удивленію обоихъ пріятелей и самаго счетовода, излишекъ долга въ пользу A оказался точь въ точь такимъ-же какъ и прежде, т. е. опять 13522 р. 95 к Тогда, порѣшивъ, что въ вычисленія вкралась вѣроятно ошибка, которой искать не стоитъ, пріятели велѣли вычислить все сызнова и принять только 5% для облегченія счета. Но, увы, и на этотъ разъ долги B привышали долги его друга ровно на 13522 р. 95 к. Этого было ужъ слишкомъ! Счетовода

упрекнули въ незнаніи ариѳметики и—устранили, а оба пріятеля, забывъ свои дѣла, принялись сами за свои странныя вычисленія то по $8^{0}/_{0}$, то по $6^{0}/_{0}$, то наконецъ по $5^{0}/_{0}$, но, къ несчастью, ни одинъ ни другой не могутъ до сихъ поръ получить въ окончательномъ результатѣ ничего другого, кромѣ того-же рокового числа 13522 р. 95 к.—Не угодно-ли имъ помочь и разъяснить это кажущееся противорѣчіе?

Рѣшенія задачъ.

№ 21. Доказать теорему: если изъ произвольной точки P окружности проведемъ три хорды PA, PB и PC (фиг. 44) и опишемъ на нихъ, какъ на діаметрахъ, три окружности, то три точки пересѣченія послѣднихъ D, E, F будутъ лежать на одной прямой.

Фиг. 44.



Соединимъ точку P съ точками D, E и F. Углы PDA и PDB равны, какъ прямые, слѣдовательно линіи DA и DB составляютъ одну прямую, точно также изъ равенства прямыхъ угловъ PEA и PEC слѣдуетъ, что линія AEC есть прямая; а изъ равенства угловъ PFB и PFC—что и линія FCB есть прямая. Такимъ образомъ видимъ, что точки D, E, F представляютъ собою не что иное какъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны треугольника ABC изъ нѣкоторой точки P, взятой на описанной около этого треугольника окружности, и, слѣдовательно, лежатъ на одной прямой (Симсона), какъ это было доказано раньше (см. рѣшеніе задачи № 6 стр. 159).

(Учен.: 6 кл. Полт. р. уч. В. З. и 7 кл. Немир. г. I. Г—бъ).

№ 23. Прямая AB раздѣлена на n равныхъ частей; въ точкахъ дѣленія приложены силы параллельныя, направленныя въ одну сторону и по величинѣ пропорціональныя разстояніямъ отъ начальной точки A. Опре-

дѣлить разстояніе центра параллельныхъ силъ отъ A и предѣлъ, къ которому приближается это разстояніе при увеличеніи числа n до безконечности.

Пусть данныя силы, считая отъ A къ B, будутъ:

$$p, 2p, 3p, \ldots (n-1)p.$$

Каждую изъ нихъ разложимъ на двѣ параллельныя, приложенныя къ конечнымъ точкамъ прямой A и B. Тогда въ A будемъ имѣть $(n-1)$ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону и по одному направленію

$$\frac{n-1}{n}p, \frac{n-2}{n}2p, \frac{n-3}{n}3p, \ldots \frac{1}{n}(n-1)p,$$

и въ точкѣ B тоже $(n-1)$ силъ

$$\frac{1}{n}p, \frac{2}{n}2p, \frac{3}{n}3p, \ldots \frac{n-1}{n}(n-1)p.$$

Называя первую сумму силъ черезъ P, вторую черезъ Q и общую равнодѣйствующую черезъ R, имѣемъ

$$Q = \frac{p}{n}(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)=p.\frac{(n-1)(2n-1)}{6},$$

$$R = p\,[1+2+3+\ldots+(n-1)]=p.\frac{n(n-1)}{2},$$

$$P=R-Q=p\frac{(n-1)(n+1)}{6}.$$

Чтобы найти разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей R отъ A, беремъ отношеніе

$$\frac{Q}{R}=\frac{(n-1)(2n-1)}{3n(n-1)}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3n}$$

и отсюда заключаемъ, что искомое разстояніе равно

$$AB\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3n}\right).$$

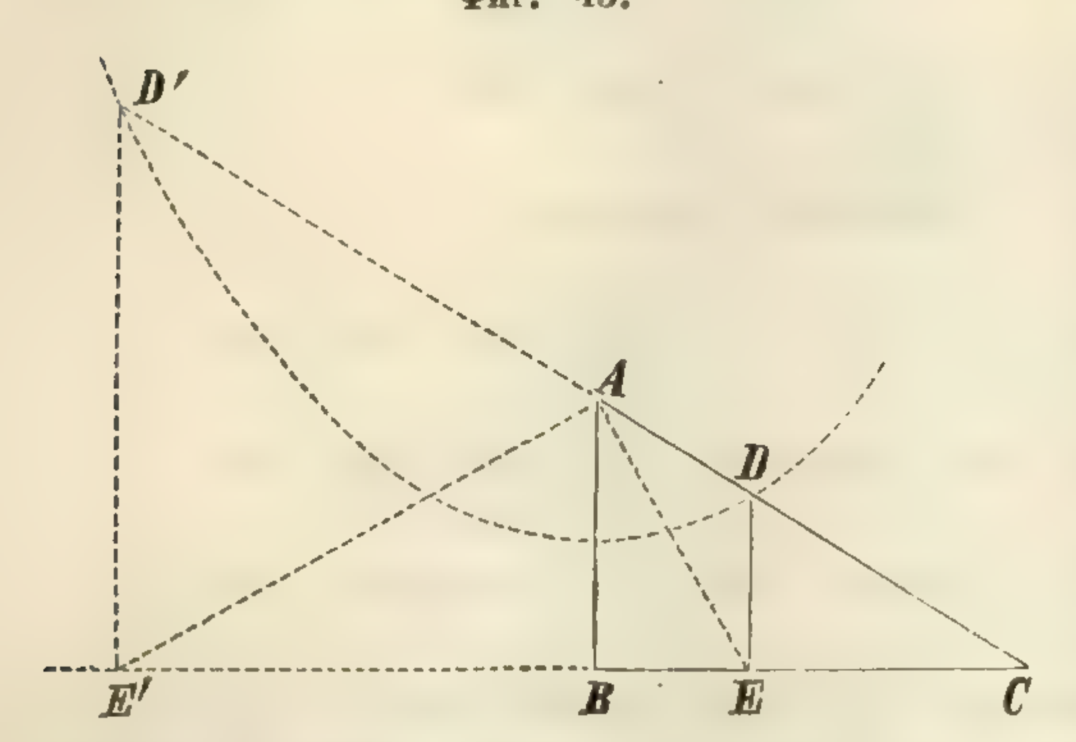
Предѣлъ, къ которому оно стремится при увеличеніи n до безконечности, очевидно будетъ $= {}^2/_3$ AB.

(Учен.: 6 кл. Урюпинскаго р. уч. А. З—въ и Ф. Л—въ, 8 кл. Екатериносл. гимн. В. К.)

NB. Каждое изъ присланныхъ рѣшеній очевидно самостоятельное, своебразное и правильное; только въ окончательной формулѣ у всѣхъ получился знакъ + вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія, что всѣхъ приложенныхъ силъ не $(n—1)$, а n, т. е. что и къ послѣдней точкѣ В приложена сила, равная np.

№ 25. На гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 45) найти точку, равноудаленную отъ катета и противолежащаго угла.

Фиг. 45.



Проводимъ биссекторъ AE и возставляемъ изъ E перпендикуляръ ED; точка D есть искомая, такъ какъ треугольникъ AED равнобедренный.

Обращаемъ вниманіе на связь этой легкой задачи съ вопросомъ № 11. Мы имѣемъ здѣсь дѣло съ пересѣченіемъ прямой линіи AC съ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ отъ прямой BC и отъ точки A, т. е. съ параболой [A, BC] (см. „Вѣстникъ" № 8, стр. 173), а такъ какъ прямая пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ, то задача, выраженная въ общемъ видѣ, должна имѣть еще другое рѣшеніе. И дѣйствительно, если проведемъ другой биссекторъ (внѣшняго угла) AE′ и изъ E′ возставимъ перпендикуляръ, до пересѣченія съ продолженною гипотенузой, то получимъ вторую точку D′, удовлетворяющую условію.

Задача эта представляетъ хорошій примѣръ легкости построенія точекъ пересѣченія параболы, заданной по фокусу и директриссѣ, съ прямой, проходящей черезъ фокусъ. Мы возвратимся къ ней во второй статьѣ о параболѣ.

(П. Поповъ, В. Долгинцевъ. Учен.: Урюпинск. р. уч. 5 кл. Н. Ов—въ, Одесск. р. уч. 6 кл. О. А. Б—съ, Полт. р. уч. 6 кл. В. З—ій, Кишин. р. уч. 6 кл. М. Н—а, Тульской г. Н. И—ій, Кам.-Под. г. 7 кл.: М. В—ій, Я. Р—тъ, 8 кл. С. Рж., Екатериносл. г. 8 кл.: Ю. Г—въ, В. К—нъ, Немировск. гимн.: 7 кл. І. Г—бъ, И. Г—чъ, И. Г—нъ, 8 клас. И. Ж., І Харьк. г. Н. Ш., Усть-Медвѣд. г. 8 кл. М. П—въ 1-ый, Кіевск. к. к. 7 кл. А. Н. и А. Ш.)

№ 28. Показать, что при $A=a^2+b^2+c^2+d^2$ и $B=m^2+n^2+p^2+q^2$ произведеніе AB можетъ быть представлено тоже въ видѣ суммы четырехъ квадратовъ.

Разбивая на двучлены, можемъ написать:

$$AB=(a^2+b^2)(m^2+n^2)+(a^2+b^2)(p^2+q^2)+(c^2+d^2)(m^2+n^2)+(c^2+d^2)(p^2+q^2)$$

или, на основаніи тождества

$$(\alpha^2+\beta^2)(\mu^2+\nu^2)=(\alpha\mu+\beta\nu)^2+(\beta\mu-\alpha\nu)^2,$$

имѣетъ:

$$AB=(am+bn)^2+(bm-an)^2+(ap+bq)^2+(bp-aq)^2+$$

$$+(cm+dn)^2+(dm-cn)^2+(cd+dq)^2+(dp-cq)^2.$$

Это послѣднее выраженіе на основаніи тождествъ

$$(am+bn)^2+(dp-cq)^2=(am+bn\pm dp\mp cq)^2\mp 2(am+bn)(dp-cq),$$

$$(cp+dq)^2+(bm-an)^2=(cp+dq\pm bm\mp an)^2\mp 2(cp+dq)(bm-an),$$

$$(ap+bq)^2+(dm-cn)^2=(ap+bq\mp dm\pm cn)^2\pm 2(ap+bq)(dm-cn),$$

$$(cm+dn)^2+(bp-aq)^2=(cm+dn\mp bp\pm aq)^2\pm 2(cm+dn)(bp-aq),$$

въ которыхъ вторые члены во вторыхъ частяхъ при сложеніи взаимно сократятся, можетъ быть представлено въ видѣ суммы четырехъ квадратовъ, такихъ какъ $(am+bn\pm dp\mp cq)^2$, что и требовалось показать.

(С. Зеликинъ. Учен. 7 кл. Кіевск. к. к. Е. М—а).

№ 29. Цѣна алмазовъ пропорціональна квадрату ихъ вѣса. Принимая это, показать, что раздѣленіемъ одного алмаза на двѣ части цѣнность его уменьшается и что maximum потери бываетъ въ случаѣ раздѣленія его на двѣ равныя (по вѣсу) части.

Пусть вѣсъ цѣльнаго алмаза будетъ P; вообразимъ его раздѣленнымъ на двѣ части, вѣса которыхъ обозначимъ черезъ p и q; слѣдовательно

$$P=p+q.$$

Если цѣнность единицы вѣса алмаза назовемъ черезъ k, то стоимость цѣльнаго алмаза будетъ $kP^2=k(p+q)^2$, а цѣнности его частей будутъ kp^2 и kq^2. Но очевидно

$$k(p+q)^2 > kp^2 + kq^2,$$

ибо $2pqk$ всегда >0.

Произведеніе $2pqk$ представляетъ величину потери цѣнности при раздѣленіи алмаза на двѣ части. Произведеніе это достигаетъ maximum при равенствѣ p и q, ибо по условію сумма этихъ множителей остается постоянною.

Задача допускаетъ наглядное геометрическое доказательство. Если вѣсъ P цѣльнаго алмаза изобразимъ прямою, напр. AB (фиг. 46), то стоимость его представится площадью квадрата ABCD. Если раздѣлимъ AB въ точкѣ a на двѣ части $Aa = p$ и $aB = q$, то общая цѣна обоихъ кусковъ изобразится квадратомъ $abcd$, который, какъ вписанный, всегда меньше квадрата ABCD. Квадратъ $abcd$ достигаетъ minimum въ томъ случаѣ когда точка a дѣлитъ AB пополамъ [1]).

Фиг. 46.

(*С. Зеликинъ. Учен.: 6 кл. Тульск. г. Н. И—ій, 7 кл.: Кіевск. к. к. Е. М--а и А. Ш—въ, Орловскаго к. к. Кр—ій, 8 кл. Немир. г. Ш. Г—ръ, Кам.-Под. г. С. Рж. и IV-й Кіевской г. А. П—ій*).

NB. Геометрическое рѣшеніе задачи представлено ученикомъ С. Рж.

Смѣсь.

Новые гальваническіе элементы и батареи. Въ послѣднее время замѣчается нѣкоторый поворотъ назадъ въ прінсканіи новыхъ источниковъ электричества. Увлеченіе аккумуляторами, повидимому, уступило мѣсто болѣе обстоятельному экспериментальному изученію тѣхъ химическихъ реакцій, которыя сопровождаются выдѣленіемъ электрической энергіи и новымъ попыткамъ создать удобную и дешевую первичную гальваническую батарею которая не всегда можетъ быть замѣнена динамо-машиною и для мелкой, такъ сказать, обыденной эксплуатаціи электричества, безспорно, должна считаться болѣе удобной. Вотъ напр. нѣкоторые изъ вновь придуманныхъ гальваническихъ элементовъ, о которыхъ на этотъ разъ мы можетъ сообщить лишь краткія свѣдѣнія.

---

[1]) См. „Вѣстн." № 9, теорема VIII, стр. 201.

1) *Элементъ Вовинкеля* съ марганцовокаліевой солью, которая насыпается въ особый рѣшетчатый балкончикъ, окружающій пористый сосудъ съ амальгамированнымъ цинкомъ и растворомъ ѣдкаго натра. Водородный электородъ составляетъ наружный сосудъ изъ платинированнаго свинца, въ который наливается слабая сѣрная кислота, такъ чтобы ея уровень лишь немногимъ превышалъ нижнее основаніе балкончика. Электровозб. сила такого элемента E=2,3 вольта, а сопротивленіе—незначительно.

2) *Батарея Эрхарта и Фоглера* устроена по типу Вольтова столба и состоитъ изъ системы цинковыхъ и свинцовыхъ пластинокъ съ промежутками для жидкости (раствора мѣднаго купороса). По нашему мнѣнію батарея эта не имѣетъ никакихъ преимуществъ.

3) *Элементъ Нельнера* съ одной жидкостью (смѣсью уксусной кислоты и уксусножелѣзной соли); вмѣсто цинка—желѣзо, уголь окруженъ перекисью марганца. Числовыхъ данныхъ не имѣемъ.

4) *Батарея Эпуарда* (Upward). Элементы ея состоятъ изъ цинка и угля; для дѣйствія батареи необходимо пропускать черезъ всѣ элементы хлоръ, соединяющійся съ цинкомъ (неамальг.). E=2,1 в., R=0,2 ома. Д-ръ Оливеръ Лоджъ далъ объ этой батареѣ благопріятный отзывъ.

5) *Элементъ Дуна* съ одною жидкостью (ѣдкимъ кали). Электроды—цинкъ и уголь; деполяризаторомъ служитъ марганцовокаліевая соль. E=1,8 в., R=1,02 ома.

6) *Батарея Кауффлера и Тольднера.* Подробности состава еще не опубликованы, хотя батарея эта уже примѣнялась (въ Америкѣ) къ электрическому освѣщенію. Растворъ, коимъ наполняются элементы, названъ *Вольта-Павія.*

7) *Элементъ Поллака (регенеративный)* относится къ типу Майдингера и, слѣдовательно, не подлежитъ переноскѣ. Составныя части: цинкъ, растворъ нашатыря (или пов. соли) и очень пористый уголь, съ мѣднымъ кольцомъ въ нижней части. Пока цѣпь разомкнута, мѣстный токъ между мѣдью и углемъ образуетъ растворы деполяризующихъ солей. E=0,9 в., R=1,02 ома.

8) *Элементъ Шаншіева.* Типъ—Грене; все различіе въ жидкости, которая приготовляется слѣдующимъ образомъ: къ смѣси изъ 10,5 частей сѣрнокислой ртути и 30 частей воды прибавляется по каплямъ крѣпкая сѣрная кислота до образованія осадка, который отдѣляется фильтрованіемъ E=1,5 в., R=0,03 ома.

9) *Батарея Макэй.* Цинки элементовъ замѣнены сплавомъ изъ 95% цинка, 2% свинца, 2% олова и 1% ртути. Угольные электроды отчасти (около $^1/_{10}$ поверхности) покрыты расплавленной сѣрой. Пористые сосуды составлены изъ 1 части угольнаго порошка и 3 частей глины. Жидкости: 10% растворъ сѣрной кислоты и смѣсь изъ 35 частей двухромокаліевой соли, 10 частей сѣрной кислоты и 40 частей—азотной. Благодаря особому приспособленію разливаніе жидкостей по элементамъ и удаленіе значительно облегчено. E=2,19 в., R=0,26 ома Въ Лондонѣ образовалось уже акціонерное общество для эксплуатаціи этой батареи, которая поэтому рекламируется очень усердно.

10) *Элементъ Варнона* представляетъ собою лишь видоизмѣненіе всѣмъ извѣстнаго элемента Лекланше. Вмѣсто прессованной смѣси кокса и перекиси марганца Варнонъ употребляетъ попросту два мѣшечка, наполненные этою смѣсью, которые онъ привязываетъ съ двухъ сторонъ къ угольной полоскѣ и сообщаетъ съ нею при посредствѣ угольнаго штифтика. Полотно мѣшечковъ пропитано особымъ веществомъ, препятствующимъ осѣданію на немъ кристалловъ.

Объ элементѣ американца *Билліярда Е. Кэза,* представляющемъ дѣйствительное изобрѣтеніе, мы поговоримъ въ особой статьѣ.

Международная телефонная выставка состоится въ Январѣ будущаго 1887 года въ Брюсселѣ. Цѣль ея—соединить всевозможные приборы и приспособленія для передачи человѣческаго голоса на разстояніе. Выставка будетъ продолжаться пять недѣль.

Отвѣты редакціи.

В. П. Я. (Екатеринбургъ). Полученная отъ Васъ рецензія о книгѣ Г. Адамантова „Пропедевтическій курсъ для преподаванія науки вообще и ариѳметики въ частности“ не будетъ помѣщена въ нашемъ журналѣ, хотя мы и раздѣляемъ отчасти Вашъ строгій взглядъ на подобнаго рода сочиненія съ претенсіональными заглавіями. Но, во 1-хъ, Ваша критика посвящена лишь разбору, или вѣрнѣе сказать, указаніямъ слабыхъ сторонъ труда Г. Адамантова, которыхъ въ ней, безспорно, очень достаточно, и въ ней нѣтъ ни одного словечка въ пользу автора, который вѣдь работалъ какъ умѣлъ съ благимъ намѣреніемъ на педагогическомъ поприщѣ и заслуживаетъ поэтому безпристрастной оцѣнки; во 2-хъ, въ Вашей рецензіи указаны тѣже самые главные недостатки, которые еще въ Сентябрской книжкѣ Жур-

нала Мин. Нар. Просв. (см. стр. 24) были перечислены въ разборѣ названной книги; у Васъ только перечень всякихъ неточностей, неясностей и пр. гораздо длинѣе, но развѣ это такъ важно, чтобы подобный списокъ стоило издавать въ видѣ отдѣльной брошюры?

Благодаримъ Васъ за присланныя задачи, хотя онѣ не вполнѣ соотвѣтствуютъ нашему плану веденія этого отдѣла. При выборѣ задачъ мы стараемся постоянно имѣть въ виду, что тѣ, которые могутъ съ охотою заниматься ихъ рѣшеніемъ, принадлежатъ къ классу людей очень занятыхъ и, стало быть, отнимать у нихъ безъ всякой пользы, дорогое время на ариѳметическую возню съ большими цифрами, или на распутываніе легкихъ но сложныхъ условій задачи, по нашему—почти грѣшно. Задачи вѣдь бываютъ различныхъ категорій: есть задачи обязательныя, есть по просту завлекающія, но есть тоже и отвлекающія. Этими послѣдними въ наше время страшно злоупотребляютъ строгіе педагоги подъ предлогомъ развитія навыка къ вычисленіямъ и математическимъ соображеніямъ, убивая при этомъ кромѣ массы времени еще и—охоту.

С. Д. Ев. (Кутаисъ). Статья Ваша о признакахъ дѣлимости чиселъ на 7 и на числа, оканчивающіяся цифрою 9 и 1, очень интересна и хорошо изложена. Помѣстить ее однакожъ мы не можемъ, потому что всѣ разсматриваемые Вами признаки дѣлимости были уже разъ предложены нашимъ читателямъ въ № 5 перваго тома Журнала Элем. Матем. (за 188⁴/₅ г.) на стр. 101. Этому предмету была также посвящена статья въ „Математическомъ Листкѣ“, издававшемся въ Москвѣ. При этомъ обращаемъ Ваше вниманіе, что признаки дѣлимости числа $abc\ldots kl$ на всѣ числа взаимно простыя съ 10, могутъ быть выведены изъ одной общей формулы

$$a \mp q[b \mp q\{c \mp \ldots \mp q(k \mp ql)\ldots\}] \equiv 0(10q \pm 1),$$

гдѣ q есть произвольное цѣлое число. (Знакъ $\equiv$ обозначаетъ *равноостаточность* лѣвой части съ нулемъ при дѣленіи на $10q \pm 1$). Взявъ верхніе знаки, т. е. — въ лѣвой части сравненія, получимъ признаки дѣлимости на числа вида $10q+1$; при нижнемъ знакѣ $+$, точно также имѣемъ общій признакъ дѣлимости на $10q-1$. Всѣ разсмотрѣнные Вами признаки получаются изъ этой общей формулы какъ частные случаи. Такъ какъ Васъ интересуетъ очевидно этотъ вопросъ, то мы указываемъ еще на слѣдующую общую теорему, изъ которой можно получать различные признаки дѣлимости: если какое нибудь число, изображенное въ десятичной системѣ счисленія, вычислить въ предположеніи, что оно написано по другой системѣ А, гдѣ $A < 10$, то полученное такимъ образомъ новое число будетъ равноостаточно съ даннымъ при дѣленіи на разность $10 - A$. Напр. число 5117, вычисленное по троичной системѣ, даетъ

$$5 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 7 = 154,$$

а такъ какъ 154 дѣлится на $10 - 3$, т. е. на 7, то и 5117 раздѣлится. И пр.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 26 Ноября 1886 года.
Тип. Е. К. Тереръ, арендуемая Н. Пилющенко и С. Бродовскимъ.